Programme de colle n°11

semaine du 8 au 12 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 13 : Limites, continuité *(en complément du programme précédent)* :

- Prolongement par continuité d'une fonction f définie sur $D\setminus\{a\}$ en un point a de D : définition, théorème, notation $\widetilde{f}$ (mais si la notation n'est pas imposée, on peut écrire “on pose $f(a)=\dots$”)
- Théorème des valeurs intermédiaires. Pour une fonction continue sur un intervalle, la stricte monotonie équivaut à l'injectivité
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe (strict) constant
- Théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment $\left[a,b\right]$ par une fonction continue f est un segment de bornes $m=\min\limits_{x\in\left[a,b\right]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in\left[a,b\right]} f(x)$
- Théorème de la bijection monotone
- Fonctions complexes : extension des notions de limite (finie), de continuité, etc. Caractérisations avec les parties réelles et imaginaires

Chapitre 14 : Dérivation

- Taux d'accroissement, nombre dérivée, dérivabilité entraine continuité
- Vu en TD : calcul de limites par le taux d'accroissement
- Dérivées à droite et à gauche : définition, caractérisation de la dérivabilité
- Un point a d'un intervalle I est dit un point intérieur de I si a n'est pas égal à une extrémité de I, notation $\mathring{I}$
- Extremum / maximum / minimum (global ou local), point critique, tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, interprétation graphique
- Lien entre dérivée et monotonie : caractérisations de la monotonie (stricte ou non)
- Limite épointée de $f: I\to\mathbb{R}$ en un point $a\in I$, notation $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$, lien avec les limites à gauche et à droite en a (selon que a soit une extrémité de I ou un point intérieur de I)
- Théorème de la limite de la dérivée

N'est pas au programme cette semaine : fonction lipschitzienne, inégalité des accroissements finis.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **12 à 14**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Théorème des valeurs intérmédaires Chapitre 14, Théorème 14.31
2. Théorème des bornes atteintes Chapitre 14, Théorème 14.36
3. Sans démonstration : théorème de Rolle. Avec démonstration : théorème des accroissements finis Chapitre 15, Théorèmes 15.11 et 15.12

Questions Flash au programme :

Chapitre 14 :

- Donner la définition de "$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$" en termes de quantificateurs pour a et ℓ finis.
- Des variantes de la question précédente où a et/ou ℓ peuvent être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.
- Donner les quatre formes indéterminées qui font intervenir les opérations somme, produit et quotient.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction f, pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point a.
- Est-ce qu'une fonction qui admet une limite à gauche et à droite en un point qui sont égales admet nécessairement une limite en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Donner la définition de "f est continue en a" en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Est-ce qu'une fonction qui est continue à gauche et à droite en un point est nécessairement continue en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Soit $a \in D$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction f définie sur $D \setminus \{a\}$ au point a ? Que vaut alors $f(a)$?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires *(celui qui traite de l'injectivité, indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !).*
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Énoncer le corollaire du théorème des bornes atteintes *(celui qui dit que l'image de tout segment par une fonction continue (...), indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !).*

Chapitre 13 :

- Donner la définition de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" ainsi que "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante"
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \to \ell$ en termes de quantificateurs.
- Que signifie l'assertion "(u_n) est convergente" ? et "(u_n) est divergente" ?
- Donner la définition de $u_n \to +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Soit (u_n) une suite croissante. Que doit-elle vérifier pour être convergente ? et divergente ?
- Donner la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes" puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Que doit vérifier l'application φ pour que $(u_{\varphi(n)})$ soit une suite extraite de (u_n) ?

- Donner la définition de "ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n)".
- On suppose que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell'$. Que peut-on dire si $\ell \neq \ell'$? et si $\ell = \ell'$?
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass ~~et le démontrer~~

Chapitre 12 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase "$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure "avec des ε" : $m = \inf A \iff \dots$
- Compléter la caractérisation de la borne supérieure avec des suites : $M = \sup A \iff \dots$
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture "$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$"
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de "D est dense dans $\mathbb{R}$" (deux assertions possibles, une seule suffit).
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de "D est dense dans $\mathbb{R}$" en termes de suites.